[MUTATIONEN DES RAUMES.]

[I.]

[TRANSFORMATIONEN DES RAUMES.]

[1.]

Man setze

$$\sqrt{\frac{1-p-q-r}{2}} = a$$

$$\sqrt{\frac{1-p+q+r}{2}} = b$$

$$\sqrt{\frac{1+p-q+r}{2}} = c$$

$$\sqrt{\frac{1+p+q-r}{2}} = d,$$

so ist

$$\begin{matrix} p & ad+bc & ac-bd \\ bc-ad & q & ab+cd \\ -ac-bd & cd-ab & r \end{matrix}$$

das allgemeine Transformationsschema der Raumcoordinaten, oder, bedeuten a, b, c, d was sie wollen[, so sind die 9 Grössen des Schemas] proportional folgenden:

$$\begin{matrix} \frac{1}{2}(cc+dd-aa-bb) & ad+bc & ac-bd \\ bc-ad & \frac{1}{2}(bb+dd-aa-cc) & ab+cd \\ -ac-bd & cd-ab & \frac{1}{2}(bb+cc-aa-dd). \end{matrix}$$

[2.]

Besser auf folgende Weise:

$$\sqrt{\frac{1+p+q+r}{2}} = a$$

$$\sqrt{\frac{1+p-q-r}{2}} = b$$

$$\sqrt{\frac{1-p+q-r}{2}} = c$$

$$\sqrt{\frac{1-p-q+r}{2}} = d,$$

$$\begin{array}{ccc}
\frac{1}{2}(aa+bb-cc-dd) & -ad-bc & -ac+bd \\
+ad-bc & \frac{1}{2}(aa-bb+cc-dd) & -ab-cd \\
+ac+bd & +ab-cd & \frac{1}{2}(aa-bb-cc+dd).
\end{array}$$

[3.]

Aus der Verbindung zweier Transformationen,

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{deren erster die Scale} & a, & b, & c, & d \\
\text{,, zweiter ,, ,,} & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta
\end{array}\right\} \text{entspricht,}$$

entsteht eine neue, deren Scale:

$$a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta$$
$$a\beta + b\alpha - c\delta + d\gamma$$
$$a\gamma + b\delta + c\alpha - d\beta$$
$$a\delta - b\gamma + c\beta + d\alpha.$$

[4.]

Sind die Coordinaten des ruhenden Punkts ξ, η, ζ, Vergrösserung $= nn$, Drehung $= \lambda$, so kann man setzen

$$a = n\cos\tfrac{1}{2}\lambda$$
$$b = n\xi\sin\tfrac{1}{2}\lambda$$
$$c = n\eta\sin\tfrac{1}{2}\lambda$$
$$d = n\zeta\sin\tfrac{1}{2}\lambda.$$

[5.]

Schreiben wir

$$a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta = A$$
$$a\beta + b\alpha - c\delta + d\gamma = B$$
$$a\gamma + b\delta + c\alpha - d\beta = C$$
$$a\delta - b\gamma + c\beta + d\alpha = D;$$
$$aa + bb + cc + dd = m$$
$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta = \mu,$$

so ist:

$$\frac{C+Di}{A+Bi} \equiv \frac{c+di}{a+bi} \qquad (\text{mod. } m),$$
$$\frac{C-Di}{A+Bi} \equiv \frac{\gamma-\delta i}{\alpha+\beta i} \qquad (\text{mod. } \mu);$$

$$\frac{B+Di}{A+Ci} \equiv \frac{\beta+\delta i}{\alpha+\gamma i} \qquad (\text{mod. } m),$$
$$\frac{B-Di}{A+Ci} \equiv \frac{b-di}{a+ci} \qquad (\text{mod. } \mu);$$

$$\frac{B+Ci}{A+Di} \equiv \frac{b+ci}{a+di} \qquad (\text{mod. } m),$$
$$\frac{B-Ci}{A+Di} \equiv \frac{\beta-\gamma i}{\alpha+\delta i} \qquad (\text{mod. } \mu).$$

[6.]

Wir bezeichnen allgemein die Combination a, b, c, d durch (a, b, c, d) und schreiben

$$(a, b, c, d)\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D).$$

Es ist also $(a, b, c, d)(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ nicht mit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)(a, b, c, d)$ zu verwechseln.

Man hat dann

$$(a, b, c, d)(a, -b, -c, -d) = (aa+bb+cc+dd, 0, 0, 0).$$

Ferner bezeichne man die Combination (a, b, c, d) durch einen Buchstaben, z. B. g, und dann die Combination $(a, -b, -c, -d)$ durch g'.

Es ist also

$$gg' = g'g = (aa+bb+cc+dd, 0, 0, 0) = (m, 0, 0, 0).$$

Ferner ist $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = h$, $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta = \mu$ gesetzt:

$$ghg' = (\alpha m, -\beta m, -\gamma m, -\delta m) = h'gg' = gg'h'.$$

[7.]

Man kann auch die Scale a, b, c, d als auf diejenige Versetzung der Coordinatenaxen sich beziehend betrachten, die der Substitution

$$\begin{array}{ccc} +a+\frac{bb}{n+a}, & +d+\frac{bc}{n+a}, & -c+\frac{bd}{n+a}, \\ -d+\frac{bc}{n+a}, & +a+\frac{cc}{n+a}, & +b+\frac{cd}{n+a}, \\ +c+\frac{bd}{n+a}, & -b+\frac{cd}{n+a}, & +a+\frac{dd}{n+a} \end{array}$$

entspricht, wo

$n = \sqrt{(aa+bb+cc+dd)}$ Vergrösserung,

$a = n\cos\lambda$, $\sqrt{(bb+cc+dd)} = n\sin\lambda$,

λ ganze Drehung.

[8.]

Die Transformationsscale a, b, c, d bedeutet
eine Vergrösserung $= (aa+bb+cc+dd)$
nebst Drehung $= \lambda$ um den Punkt, dessen Coordinaten

$$\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\lambda, \qquad \frac{c}{a}\cot\tfrac{1}{2}\lambda, \qquad \frac{d}{a}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\lambda.$$

Geben drei auf einander folgende Scalen

$$M, 0, 0, 0$$

und sind die betreffenden Drehungspunkte P, P', P'',
die Winkel $\lambda, \lambda', \lambda''$,

so sind $\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}\lambda', \frac{1}{2}\lambda''$ die Winkel des sphärischen Dreiecks zwischen P, P', P''.

[II.]

MUTATIONEN DES RAUMES VON DREI DIMENSIONEN.

1.

Seit langer Zeit habe ich das Verfahren gebraucht, jede Mutation eines Raumes (worunter ich verstehe seine Verrückung in einem andern Raume verbunden mit einer allgemeinen Vergrösserung oder Verkleinerung des erstern, unbeschadet der Conservation der Ähnlichkeit) durch vier Grössen

$$a, b, c, d$$

auszudrücken, deren Complex ich die Mutationsscale nenne. Es wird zugleich angenommen, dass Ein Punkt des beweglichen Raumes in dem andern als fest oder absolut betrachteten immer unbewegt bleibe, welcher Punkt mit Nullpunkt bezeichnet werden mag.

2.

Die Bedeutung dieser vier Grössen ist hierbei folgende. In dem festen Raume werden drei von 0 ausgehende, rechte Winkel mit einander machende gerade Linien angenommen 01, 02, 03. Man setze

$$\sqrt{(bb+cc+dd)} = \rho,$$

und lasse

$$\frac{b}{\rho}, \frac{c}{\rho}, \frac{d}{\rho}$$

die Cosinus der drei Winkel sein, welche eine Gerade $0P$ resp. mit 01, 02, 03 macht. Diese gerade Linie hat in dem bewegten Raume nach der Mutation dieselbe Lage wie vor derselben; [wird ferner]

$$\sqrt{(aa+\rho\rho)} = k$$

gesetzt, oder

$$k = \sqrt{(aa+bb+cc+dd)},$$

ist k die linearische Vergrösserung des mutirten Raumes.

Endlich

$$a = k\cos\theta, \qquad \rho = k\sin\theta$$

gesetzt, ist 2θ diejenige Drehung um $0P$, durch welche, verbunden mit der Vergrösserung k, die Mutation erzeugt werden kann.

BEMERKUNG.

Die unter [I] zusammengefassten Notizen stehen in einem Handbuche. Die Nummern 1 bis 7 stimmen in Schrift und Tinte genau mit astronomischen Aufzeichnungen aus dem Jahre 1819 überein, die sich auf den vorhergehenden Seiten befinden. Verschieden von ihnen sieht die als Nummer 8 bezeichnete Bemerkung aus. Sie trägt sachlich den Character eines spätern Zusatzes, und diese Annahme wird auch dadurch bestätigt, dass augenscheinlich gleichzeitig mit ihr niedergeschriebene astronomische Notizen aus der Zeit von 1822 bis 1823 stammen. Die Notiz [II] füllt einen einzelnen Zettel ohne Datirung. Nach der Handschrift zu urtheilen, stammt sie aus noch späterer Zeit.

STÄCKEL.